11.2.19 Trigonometrie I

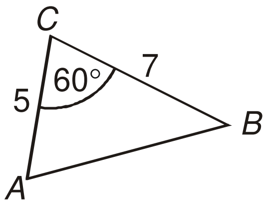
Předpoklady:

Př. 1: Pro $b \in R \setminus \{-2; 0; 2\}$ zjednoduš: $\dfrac{1+\dfrac{2}{b}}{\dfrac{b^2}{2}-2}=$. V záznamovém archu uveď celý postup řešení. **max. 2 body**

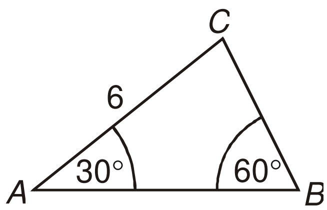
$$\frac{1+\frac{2}{b}}{\frac{b^2}{2}-2}==\frac{\frac{b+2}{b}}{\frac{b^2-4}{2}}=\frac{2(b+2)}{b(b+2)(b-2)}=\frac{2}{b(b-2)}$$

Př. 2: Přiřaď ke každému zadání trojúhelníku ABC (1. – 3.) odpovídající délku c úsečky AB (A-E). **max. 3 body**

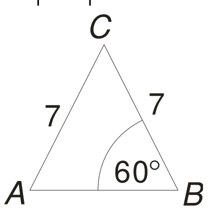
1. $|AC| = 5\text{ cm}$, $|BC| = 7\text{ cm}$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$



2. $|AC| = 6\text{ cm}$, $|\sphericalangle CAB| = 30°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$



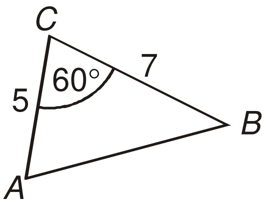
3. $|AC| = 7\text{ cm}$, $|BC| = 7\text{ cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$



A) $4\sqrt{2}$ cm B) $\sqrt{39}$ cm C) $4\sqrt{3}$ cm D) 7 cm E) $5\sqrt{2}$ cm

Vypočteme délky úseček AB v jednotlivých zadáních.

1. $|AC| = 5\text{ cm}$, $|BC| = 7\text{ cm}$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$

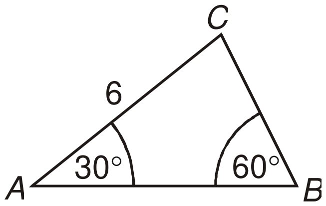


Ze zadání je zřejmé, že trojúhelník ABC není ani pravoúhlý ani rovnoramenný nebo rovnostranný $\Rightarrow$ délku strany AB určíme pomocí kosinové věty (platí pro všechny trojúhelníky).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 49 + 25 - 35 = 39$$

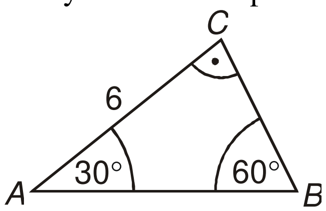
$c = \sqrt{39}$ $\Rightarrow$ možnost B).

2. $|AC| = 6\text{ cm}$, $|\sphericalangle CAB| = 30°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$



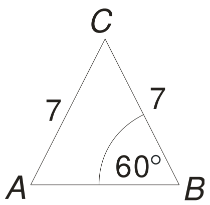
Pro velikost úhlu γ platí: $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 30° - 60° = 90°$

Trojúhelník ABC je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C $\Rightarrow$ pro výpočet velikosti strany AB můžeme použít goniometrické funkce (případně Pythagorovu větu).



Platí: $\cos 30° = \dfrac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \dfrac{|AC|}{\cos 30°} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{6\cdot 2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ možnost C)

3. $|AC| = 7\text{ cm}$, $|BC| = 7\text{ cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$

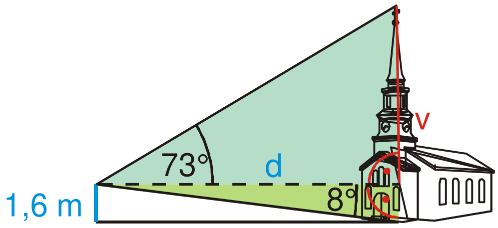


Trojúhelník ABC je rovnoramenný s rameny AC a BC $\Rightarrow$ musí platit $\alpha = \beta = 60°$. Dva úhly v trojúhelníku se rovnají $60°$ $\Rightarrow$ i třetí úhel se rovná $60°$ $\Rightarrow$ trojúhelník ABC je rovnostranný $\Rightarrow$ všechny strany mají stejnou délku $\Rightarrow$ $|AB| = 7\text{ cm}$ $\Rightarrow$ možnost D).

Celková odpověď: 1B), 2 C), 3 D).

Př. 3: Petr stojí na vodorovném náměstí a očima ve výšce 1,6 m vidí patu radnice v hloubkovém úhlu $8°$. Ze stejného místa vidí špičku radniční věže ve výškovém úhlu $73°$. Vypočti výšku radniční věže. Výsledek zaokrouhli na desetiny, dílčí výpočty nezaokrouhluj. **max. 2 body**

Nakreslíme obrázek situace:



Získali jsme dva pravoúhlé trojúhelníky. Ze zeleného můžeme určit vodorovnou vzdálenost *d* mezi Petrem a věží. S pomocí vzdálenosti *d* pak v modrém trojúhelníku určíme výšku *v*.

Zelený trojúhelník: $\mathrm{tg}\, 8° = \frac{1,6}{d} \qquad / \cdot d$

$d \cdot \mathrm{tg}\, 8° = 1,6 \qquad / : \mathrm{tg}\, 8°$

$d = \frac{1,6}{\mathrm{tg}\, 8°}$

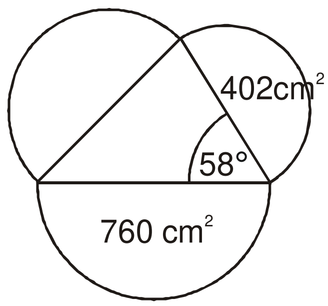
Modrý trojúhelník: $\mathrm{tg} 73° = \frac{v}{d} \qquad / \cdot d$

$v = d \cdot \mathrm{tg} 73° = \frac{1,6}{\mathrm{tg} 8°} \cdot \mathrm{tg} 73° \text{ m} = 37,2 \text{ m}$

Výška věže: $1,6 + 37,2 \text{ m} = 38,8 \text{ m}$

Výška radniční věže je 38,8 m.

Př. 4: Tři půlkruhy, z nichž každé dva mají právě jeden společný vrchol, vymezují trojúhelník *ABC*. V obrázku jsou uvedeny obsahy dvou půlkruhů a velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku *ABC*.
Jaký je obsah trojúhelníku *ABC* zaokrouhlený na cm^2?



A) menší než 298 cm^2 B) 298 cm^2
C) 309 cm^2 D) 361 cm^2 E) více než 361 cm^2 **2 body**

Z obsahů půlkruhů můžeme určit jejich poloměry, které představují poloviny dvou stran trojúhelníku *ABC*. Z nich pak můžeme určit obsah trojúhelníku pomocí vzorce $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$.

Obsah kruhu: $S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow a = 2\sqrt{\frac{2S_1}{\pi}}$ (strana je dvojnásobek poloměru kružnice, máme zadané obsahů půlkruhů, které musíme vynásobit dvěma, abychom získali obsah celého kruhu).
Dosazením určíme obě strany:

$a=2\cdot\sqrt{\frac{2S_1}{\pi}}=2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 760}{\pi}}=43{,}99\ \text{cm}$

$b=2\cdot\sqrt{\frac{2S_2}{\pi}}=2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 402}{\pi}}=32{,}00\ \text{cm}$

Dopočteme obsah: $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 43{,}99\cdot 32\cdot\sin 58°\ \text{cm}^2\doteq 596{,}89\ \text{cm}^2\doteq 597\ \text{cm}^2$

Správná odpověď E) více než $361\ \text{cm}^2$.

Dodatek: Poměrně snadno lze k výsledku dojít i přes obecné řešení:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{2S_1}{\pi}}\cdot 2\sqrt{\frac{2S_2}{\pi}}\cdot\sin\gamma=\sqrt{\frac{2S_1}{\pi}\cdot\frac{2S_2}{\pi}}\cdot 2\cdot\sin\gamma=\frac{2}{\pi}\sqrt{S_1\cdot S_2}\cdot 2\cdot\sin\gamma$$

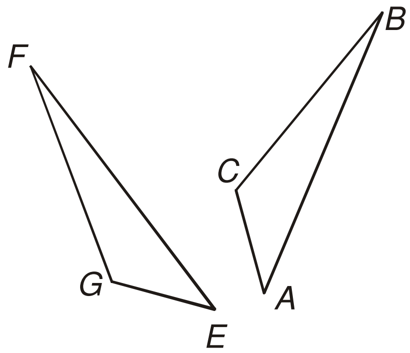
$$S=\frac{4}{\pi}\sqrt{S_1\cdot S_2}\cdot\sin\gamma=\frac{4}{\pi}\sqrt{402\cdot 760}\cdot\sin 58°=596{,}8297$$

Př. 5: Obrazem trojúhelníku ABC v otočení je trojúhelník EFG. Platí: $|BC|=5\sqrt{2}$, $|\sphericalangle CAB|=30°$, $|\sphericalangle EFG|=15°$. Jaká je délka strany AB?

A) $5\sqrt{3}$ cm B) 8 cm C) $6\sqrt{2}$ cm

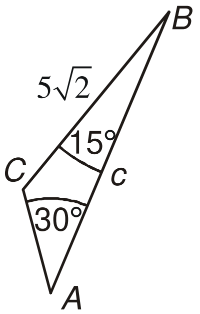
D) 10 cm E) jiná délka

2 body



Trojúhelníky ABC a EFG jsou shodné, proto platí:

$|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle EFG|=15°$. Překreslíme známe velikosti do obrázku trojúhelníku ABC.



Známe pouze jednu velikost $\Rightarrow$ velikost strany c můžeme určit pomocí sinové věty.

Potřebujeme určit velikost úhlu γ.

$\gamma=180°-30°-15°=135°$.

Dosadíme do sinové věty: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\quad /\cdot\sin\gamma$

$$c=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 30°}\cdot\sin 135°=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}=2\cdot\frac{5\cdot 2}{2}\ \text{cm}=10\ \text{cm}$$

Správná odpověď D).

Př. 6: V pravoúhlém trojúhelníku ABC má přepona AB délku c, odvěsna AC délku b a zbývající strana délku a. Vnitřní úhel při vrcholu A má velikost α a při vrcholu B

velikost β. Rozhodni o každém z následujících tvrzení (1. – 4.), zda je pravdivé (A), či nikoli (N). **max. 2 body**

A) $1=\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}$ B) $\frac{a+c}{b}>1$ C) $a\cdot \mathrm{tg}\beta = c\cdot\cos\alpha$ D) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$

Projdeme jednotlivá tvrzení a rozhodneme o jejich správnosti.

A) $1=\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2} \quad /\cdot a^2$

$a^2=c^2-b^2 \quad /+b^2$

$a^2+b^2=c^2$

Pythagorova věta ve tvaru pro trojúhelník s přeponou $c \Rightarrow$ platí pro každý pravoúhlý trojúhelník s přeponou $c \Rightarrow$ platí i pro náš trojúhelník $\Rightarrow$ ANO.

B) $\frac{a+c}{b}>1 \quad /\cdot b$

$a+c>b$ - trojúhelníková nerovnost, musí platit v každém trojúhelníku $\Rightarrow$ ANO.

C) $a\cdot tg\beta = c\cdot\cos\alpha$

Dosadíme do rovnosti: $\mathrm{tg}\beta=\frac{b}{a}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.

$a\cdot\frac{b}{a}=c\cdot\frac{b}{c}$

$b=b$, rovnost platí $\Rightarrow$ ANO.

D) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$

Vztah připomíná základní vzorec $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ale vyskytují se v něm sinus i cosinu a navíc dvou různých úhlů.

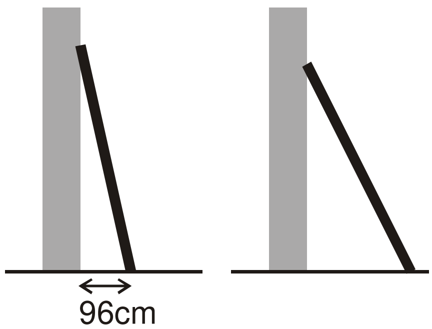
Rozepíšeme: $\sin\beta=\frac{b}{c}=\cos\alpha$

Dosadíme do vztahu: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, platí vždy $\Rightarrow$ ANO.

Správná odpověď: A) ANO, B) ANO, C) ANO, D) ANO.

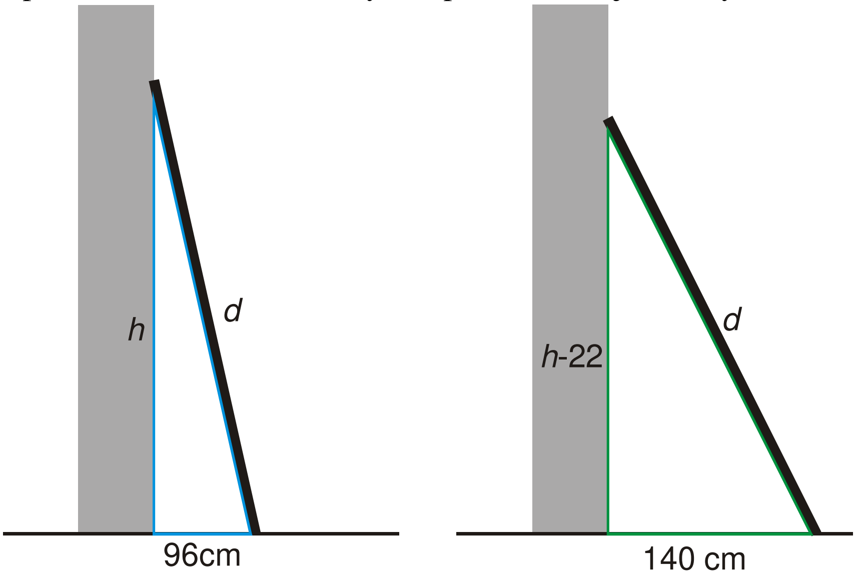
Př. 7: Nestabilní zeď měla být podepřena trámem postaveným na vodorovnou dlažbu ve vzdálenosti 96 cm od domu. Statikovi se zdálo postavení trámu příliš svislé a posunul dolní konec trámu o 44 cm dál od zdi, čím horní konec trámu podepíral zeď o 22 cm níže. Urči délku trámu v cm. V záznamovém archu uveď celý postup řešení.

Max. 2 body



Označíme si výšku ve které byl trám původně podepřen h, délku trámu d.

Opřením trámu o zeď vznikly dva pravoúhlé trojúhelníky.



V obou platí Pythagorova věta.

$h^2+96^2=d^2$ $\qquad\qquad$ $(h-22)^2+140^2=d^2$

Vypočteme nejdříve hodnotu h (abych nemuseli složitě vyjadřovat h pomocí d).

$h^2+96^2=(h-22)^2+140^2$

$h^2+96^2=h^2-44h+22^2+140^2 \qquad / -h^2+44h-96^2$

$44h=22^2+140^2-96^2$

$44h=10\,868 \qquad / :44$

$h=247$

Dopočteme d: $d^2=h^2+96^2=247^2+96^2=70225$

$d=265$ cm

Trám má délku 265 cm.

Shrnutí: